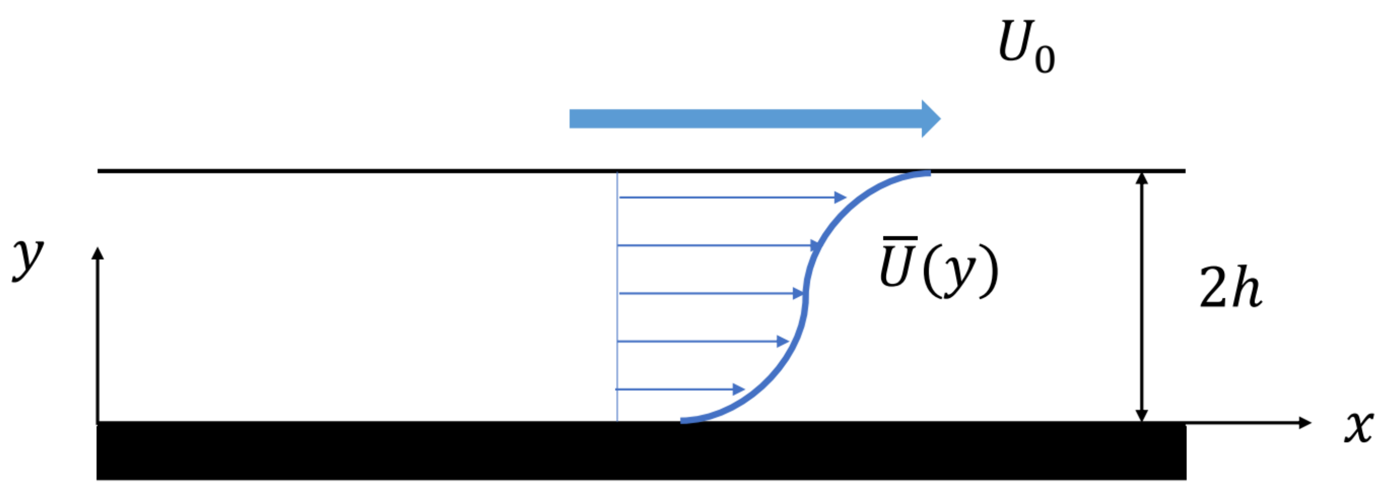
作业 4

本-(2021-2022-1)-MS3401-1-湍流

描述

在课上，我们演示了一个充分发展的湍流 Couette 流动（如下图：在两个无限长和宽的平行平面壁面之间的渠道中）. 壁面之间的距离为 $2h$, 下壁面是静止的，上壁在其自身平面内以速度 U_0 移动. 假设流动包括两个壁面层，它们在渠道中心线处相互匹配. 通过管道流动中的实验证据（Hinze，1959）表明，如果假设任何地方的涡黏性都不大于 $0.07hu_*$, 在湍流 Couette 流动中可以得到一个更精确的速度分布表达式. 在此基础上，问：



1. 结合 Boussinesq 涡黏性假说与 Prandtl 混合长度假说，写出涡黏性 ν_* 的表达式；【5分】
2. 通过分析黏性应力与雷诺应力在 y 方向上的分布情况，求出涡黏性最大的位置（要求详细过程）；【10分】

3. 求出一个更准确的速度分布表达式.（过程详细）【10分】

解

将雷诺分解

$$u_i = \overline{u}_i + u_i', \quad p = \overline{p} + p' \tag{1}$$

代入**不可压缩**（假设 2A）流体的连续方程

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \tag{2}$$

取时间平均得

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u_i'}{\partial x_i} = 0. \tag{3}$$

将不可压缩的**牛顿流体**（假设 1）的本构方程

$$\sigma_{ji} = \sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu s_{ij} \tag{4}$$

代入柯西运动方程（Cauchy's equation of motion）

$$\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + f_i \tag{5}$$

得

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(-p\delta_{ij} + \mu\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) + f_i. \tag{6}$$

将 (1) 代入 (6)，取时间平均，并考虑 (3)，得

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} + \overline{u}_j\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(-\overline{p}\delta_{ij} + \underbrace{\mu\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j}}_{\text{粘性应力}} \underbrace{-\rho\overline{u_i'u_j'}}_{\text{雷诺应力}}\right) + \overline{f}_i. \tag{7}$$

Boussinesq 涡黏性假说认为，式 (7) 中的雷诺应力项具有与粘性应力项相似的形式：（*问：请求关于 $u_i'u_j'$ 的符号（据说通常为负？我认为应与 $\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j}$ 符号相反？）的更完整解释*）

$$-\rho\overline{u_i'u_j'} = \mu_{\mathrm{t}} \left|\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j}\right| \tag{8}$$

或

$$\overline{u_i'u_j'} = -\nu_{\mathrm{t}} \left|\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j}\right|, \tag{8'}$$

式中 $\nu_{\mathrm{t}} := \dfrac{\mu_{\mathrm{t}}}{\rho}$.

Prandtl 混合长度假说认为，$\overline{|u_i'|}, \overline{|u_j'|} \sim l \left|\dfrac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j}\right| \Rightarrow$（*问：此处不严格？*）

$$\overline{u_i'u_j'} = -l_{\mathrm{m}}^2 \left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j}\right)^2, \tag{9}$$

式中 Prandtl 混合长度 l_{m} 可由实验确定，通常取 $l_{\mathrm{m}} = \kappa x_j, \kappa$ 是 Von-Karman 常数，常取 0.4~0.41.

i

联立 $(8)(9)$ 得由 Prandtl 混合长度假说确定的 Boussinesq （运动）涡黏度

$$\nu_{\mathrm{t}} := \frac{\mu_{\mathrm{t}}}{\rho} = l_{\mathrm{m}}^2 \left|\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j}\right|. \tag{10}$$

对于图示的 xy 平面上的二维剪切流动 $\left(\dfrac{\partial \overline{u}}{\partial y} > 0\right)$, 上式成为（取 $i=1, j=2$）

$$\nu_{\mathrm{t}} = l_{\mathrm{m}}^2 \frac{\partial \overline{u}}{\partial y}. \tag{11}$$

本题取（*问：是否合理？[1,eq(11.64)]*）

$$l_{\mathrm{m}} = \kappa \min(y, 2h - y). \tag{12}$$

注：上面的推导有问题，或可参考文献 [1] 的第 11.6 节.

假定流动是**定常**（假设 4A）的、流体所受的**质量力为零**（假设 5A）、**压强梯度为零向量**（假设 5B）、流体是**匀质**的（假设 2B）、流体的**动力学粘度为常数**（假设 3）. 这些假设使 (7) 成为

$$\overline{u}_j \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} = \nu \frac{\partial^2 \overline{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \overline{u_i'u_j'}}{\partial x_j}. \tag{7'}$$

继续假定流动是 xy 平面上的**二维流动**（假设 6A）$\left(\Rightarrow w = w' = 0, \dfrac{\partial}{\partial z} \equiv 0\right)$、流动是**纯剪切流动**（假设 6B）$(\Rightarrow v = v' = 0, u = u(y), \overline{u} = \overline{u}(y))$、流动**在 x 方向上均匀**（假设 4B）. 上述假设使 $(7')$ 成为:

$$i = 1: \quad 0 = \nu \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial y^2} - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} \tag{13}$$

以及

$$i = 2, 3: \quad 0 = 0.$$

式 (13) 对 y 积分一次，得

$$\nu \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} - \overline{u'v'} = u_*^2, \tag{14}$$

上式右端是积分常数，有一定的物理意义. 左端第一项表示粘性应力，第二项表示雷诺应力. 定义量纲一的**雷诺数** $\mathrm{Re} := \dfrac{O(\overline{u'v'})}{O\left(\nu \dfrac{\partial \overline{u}}{\partial y}\right)}$. （*问：这雷诺数和* $\dfrac{O(u_j \dfrac{\partial u_i}{\partial u_j})}{O(\text{粘性力})}$ *的联系？*）

假定**时间平均速度 $\overline{u} = \overline{u}(y)$ 满足**（假设 8）（*问：如何通过其他假设推出？*）

$$\overline{u}(y) + \overline{u}(2h - y) = 2\overline{u}(h), \tag{15}$$

上式两边对 y 求导，得时间平均速度梯度满足

$$\left.\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}\right|_{y=y} = \left.\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}\right|_{y=2h-y}. \tag{16}$$

由于有 $(15)(16)$, 下面先将讨论限制在 $0 \le y \le h$ 区域内，再由对称性得出 $h < y \le 2h$ 区域内的情况.

1. **粘性底层.**
   $\mathrm{Re} \ll 1 \Rightarrow$ 粘性力主导，故 (14) 左端第二项可略，成为

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} = \frac{u_*^2}{\nu}. \tag{17}$$

   设下边界是**无滑移边界**（假设 7），即 $\overline{u}|_{y=0} = 0$. 式 (17) 对 y 从 $y = 0$ 到粘性底层顶 $y = \delta$ 积分，得

$$\overline{u}=\frac{u_*^2}{\nu}y,\quad 0\leq y<\delta. \tag{18}$$

2. **湍流层.**
   $\mathrm{Re}\gg 1\Rightarrow$ 雷诺应力主导，故 (14) 左端第一项可略，成为

$$-\overline{u'v'}=u_*^2. \tag{19}$$

   对于图示的 xy 平面上的二维剪切流动，式 (9) 成为（取 $i=1,j=2$）

$$\overline{u'v'}=-l_{\mathrm{m}}^2\left(\frac{\partial\overline{u}}{\partial y}\right)^2. \tag{20}$$

   由 (19)(20) 得

$$\frac{\partial\overline{u}}{\partial y}=\frac{u_*}{l_{\mathrm{m}}},\quad \delta<y\leq h. \tag{21}$$

   上式对 y 从 $y=\delta$ 到 $y=y$ 积分，由 (12) 取混合长度 $l_{\mathrm{m}}=\kappa y$, 并以由 (21) 得到的粘性底层顶的速度 $\overline{u}\big|_{y=\delta}=\dfrac{u_*^2}{\nu}\delta$ 作为下边界条件，得

$$\overline{u}=\frac{u_*^2}{\nu}\delta+\frac{u_*}{\kappa}\ln\frac{y}{\delta},\quad \delta<y\leq h. \tag{22}$$

ii

由 (11)(12)(16)(17)(21) 得涡黏度分布

$$\nu_{\mathrm{t}}=\nu_{\mathrm{t}}(y):=\begin{cases} l_{\mathrm{m}}^2\dfrac{u_*^2}{\nu}, & 0<y<\delta,\\ l_{\mathrm{m}}u_*, & \delta<y<h,\\ \nu_{\mathrm{t}}(2h-y), & h<y<2h,\end{cases} \tag{23}$$

式中 $l_{\mathrm{m}}=\kappa y$. 由上式可知，若能补充定义使得 ν_{t} 在 $y=\delta$ 处连续 $\left(\Rightarrow\delta=\dfrac{\nu}{\kappa u_*}\right)$, 则 ν_{t} 在 $y=h$ 处取得最大值 $\kappa h u_*$.

由 (15)(18)(22) 得速度分布

$$\overline{u} = \overline{u}(y) := \begin{cases} \dfrac{u_*^2}{\nu} y, & 0 \le y < \delta, \\ \dfrac{u_*^2}{\nu}\delta + \dfrac{u_*}{\kappa} \ln \dfrac{y}{\delta}, & \delta < y \le h, \\ 2\overline{u}(h) - \overline{u}(2h - y), & h < y \le 2h. \end{cases} \tag{24}$$

其中，u_*, δ 的选取要满足相容性条件 $\overline{u}(2h) = U_0$ 或 $\overline{u}(h) = U_0/2$. 可见，当 $\delta = \dfrac{\nu}{\kappa u_*}$ 时，$\overline{u}$ 具有一阶连续导数.

iii

现在引入约束：

$$\nu_{\mathrm{t}} \le bhu_*, \quad b = 0.07. \tag{25}$$

由 (23) 知，在 $y = y_2 := \dfrac{bh}{\kappa}$ 处，有 $\nu_{\mathrm{t}} = bhu_*$. 故将 $0 < y \le h$ 区域内的流动分为三层：1) $0 < y \le \delta$; 2) $\delta < y \le y_2$; 3) $y_2 < y \le h$. 假定在前两层中，速度分布仍符合 (24). 对于第三层，应该有 $\mathrm{Re} \gg 1 \Rightarrow$ 雷诺应力主导，故 (14) 左端第一项可略，式 (19) 仍成立. 继续采取 Prandtl 混合长度假说 (11)(20), 从而 (21) 也成立. 进一步假定

$$\nu_{\mathrm{t}}|_{\delta < y \le h} \equiv bhu_*, \tag{26}$$

则由 (11)(21)(26) 得

$$\delta < y \le h: \quad l_{\mathrm{m}} \equiv bh. \tag{27}$$

由 (19)(20)(27) 得

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} = \frac{u_*}{bh}, \quad \delta < y \le h. \tag{28}$$

上式对 y 从 $y = y_2$ 到 $y = h$ 积分，得

$$\overline{u} = \overline{u}|_{y=y_2} + \frac{u_*}{bh}(y - y_2), \tag{29}$$

其中下边界由 (24) 给出：

$$\overline{u}|_{y=y_2} = \frac{u_*^2}{\nu}\delta + \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{bh}{\kappa\delta}. \tag{30}$$

综上，速度分布为

$$\overline{u}=\overline{u}(y):=\begin{cases}\dfrac{u_*^2}{\nu}y, & 0\le y\le\delta,\\ \dfrac{u_*^2}{\nu}\delta+\dfrac{u_*}{\kappa}\ln\dfrac{y}{\delta}, & \delta<y\le\dfrac{bh}{\kappa},\\ \dfrac{u_*^2}{\nu}\delta+\dfrac{u_*}{\kappa}\ln\dfrac{bh}{\kappa\delta}+\dfrac{u_*}{bh}(y-\dfrac{bh}{\kappa}), & \dfrac{bh}{\kappa}<y\le h,\\ 2\overline{u}(h)-\overline{u}(2h-y), & h<y\le 2h,\end{cases}\tag{31}$$

式中 $b=0.07$. 且 u_*,δ 的选取要满足相容性条件 $\overline{u}(2h)=U_0$ 或 $\overline{u}(h)=U_0/2$. 可见 $\overline{u}$ 具有一阶连续导数（当 $\delta=\dfrac{\nu}{\kappa u_*}$）. 涡黏度分布为

$$\nu_{\mathrm{t}}=\nu_{\mathrm{t}}(y):=\begin{cases}l_{\mathrm{m}}^2\dfrac{u_*^2}{\nu}, & 0<y<\delta,\\ l_{\mathrm{m}}u_*, & \delta<y<\dfrac{bh}{\kappa},\\ bhu_*, & \dfrac{bh}{\kappa}<y<h,\\ \nu_{\mathrm{t}}(2h-y), & h<y<2h,\end{cases}\tag{32}$$

式中 $l_{\mathrm{m}}=\kappa y$. 可取 $\delta=\dfrac{\nu}{\kappa u_*}$ 以使 ν_{t} 在 $y=\delta$ 处连续.

References

[1] 张鸣远,等.高等工程流体力学[M].高等教育出版社,2012.

联系我

危国锐

E-mail: weiguorui@sjtu.edu.cn;313017602@qq.com